

Miércoles y Viernes  
12.00-13.50  
Aula: SD\_405  
(Miércoles) y O\_401  
(Viernes)

...

**Mauro Artigiani**

m.artigiani@uniandes  
.edu.co

**Horario de atención:**

**Lunes 14.00-16.00**

**o por cita**

**Oficina: H-001**

**Página del curso:**

<https://m-artigiani.github.io/teaching/te20192>

# MATE-3205, MATE-4205 • Teoría Ergódica

Universidad de los Andes

Semestre 2019 - II

*"Time past and time future  
What might have been and what has been  
Point to one end, which is always present."*

T.S. Eliot, *Burnt Norton, Four Quartets.*

## Descripción del curso:

La palabra *ergódico* nace de la combinación de las palabras griegas trabajo ( $\acute{\epsilon}\rho\gamma\omicron\nu$ ) y camino ( $\omicron\delta\delta\acute{\omicron}\varsigma$ ). La teoría ergódica es el estudio del comportamiento a largo plazo de los sistemas dinámicos desde un punto de vista estadístico. Es decir, es el estudio de las propiedades de un sistema dinámico a través de las medidas y de sus relaciones con estas. Por su naturaleza, la teoría ergódica se encuentra en la intersección de la dinámica, la teoría de la medida, el análisis funcional y la probabilidad. Además ha sido utilizada con resultados espectaculares en teoría de los números y en combinatoria aditiva.

Este curso está dividido en tres partes:

- Introducción de las definiciones y maquinaria: en esta parte daremos las definiciones básicas, haremos ejemplos de sistemas dinámicos que las satisfacen (o no) y demostraremos los resultados fundamentales de la teoría misma.
- Introducción a la dinámica homogénea: flujo geodésico y horocíclico en superficies hiperbólicas: introduciremos la geometría hiperbólica a través del modelo del semiplano de Poincaré y mostraremos que el plano hiperbólico es un espacio homogéneo. Después de haber definido los flujos geodésico y horocíclico estudiaremos sus propiedades ergódicas.
- Aplicaciones: conectaremos la dinámica del flujo geodésico con las fracciones continuas y la teoría de los números. Utilizaremos la equidistribución de los horociclos para contar las geodésicas cerradas en el toro. Si el tiempo lo permite, aplicaremos las mismas técnicas para estudiar un modelo de la física matemática: el gas de Lorentz.

## Prerrequisitos:

MATE-4220 Medida y Integración

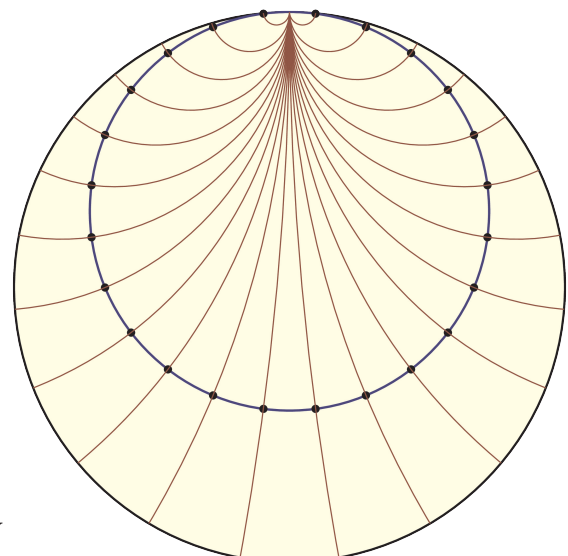
*Deseo de tomar un rol activo en clase. Se espera que cada estudiante se tome el tiempo*

*necesario para digerir y reflexionar sobre lo aprendido en cada clase, y que realice las lecturas asignadas a tiempo.*

## Objetivos del curso

Al final del curso los estudiantes podrán:

- Entender y explicar las definiciones básicas de la teoría ergódica y de las superficies hiperbólicas;
- Comparar y contrastar distintos ejemplos de sistemas dinámicos y sus propiedades;
- Evaluar propiedades estadísticas relacionadas con los sistemas dinámicos;
- Identificar que distintos puntos de vista pueden ser útiles para enfrentar el mismo problema.
- Desarrollar sus habilidades en trabajo en equipos y en discusiones.
- Escribir matemáticas, de manera clara y lógica, en sus tareas y en el proyecto final.



- Leer de manera autónoma artículos matemáticos.
- Explicar oralmente, de manera clara y coherente, su proyecto.

## Evaluación

Tres tareas: 50%. Proyecto final: 50%

Se darán tres tareas en la primera parte del curso, más o menos cada tres semanas.

Cada estudiante tiene que elegir un proyecto final (más detalles, incluido sobre las notas, abajo).

*Las notas finales serán aproximadas a la décima más cercana.*

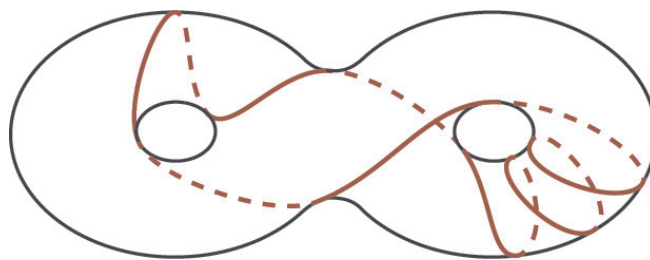
## Libros y notas:

- Einsiedler, Manfred and Ward, Thomas, *Ergodic Theory with a view towards Number Theory*. Springer-Verlag, London, 2011.
- Bekka, Bachir M. and Mayer, Matthias, *Ergodic Theory and Topological Dynamics of Group Actions on Homogeneous Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- Oliveira, Krerley and Viana, Marcelo, *Foundations of Ergodic Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- Omri Sarig, *Lecture notes on ergodic theory*.

<http://www.weizmann.ac.il/math/sarigo/ergodic-theory-course>

## Línea de tiempo

- SEMANA 1: Introducción al curso.
- SEMANA 2: Definiciones básicas, recurrencia, teorema ergódico de von Neumann.
- SEMANA 3: Teorema ergódico de Birkhoff, ergodicidad.
- SEMANA 4: Ejemplos y consecuencias de la ergodicidad, Lema de Kac.
- SEMANA 5: Medidas invariantes, descomposición ergódica y única ergodicidad.
- SEMANA 6: Puntos genéricos y equidistribución, mezclamiento y mezclamiento débil.
- SEMANA 7: Mezclamiento débil.
- SEMANA 8: Introducción a la geometría hiperbólica, dominios de Dirichlet, ejemplos.
- SEMANA 9: El flujo geodésico es Anosov, ergodicidad por el método de Hopf, closing lemma.
- SEMANA 10: Relación entre flujo geodésico en la superficie modular y el mapa de Gauss.
- SEMANA 11: Fenómeno de Mautner por el flujo horocíclico, el flujo horocíclico es mezclante de todos los órdenes.
- SEMANA 12: Clasificación de las medidas ergódicas por el flujo horocíclico, no hay fuga de masa, equidistribución de los horociclos.
- SEMANA 13: Conteo de puntos en los retículos, conteo de las geodésicas cerradas en el toro plano.
- SEMANAS 14-16: Aplicaciones al gas de Lorentz.



Las tareas se pueden escribir en inglés o español.

Se recomienda escribirlas en LaTeX pero no es necesario.

Las tareas deben entregarse al comienzo de la clase del día de entrega.

Cada día de retraso causa una penalidad del 0.2 en la nota.

El trabajo en equipos pequeños está incentivado. Cada uno tiene que entregar su tarea, escribiendo claramente con quien trabajó.

## Proyecto:

El objetivo del proyecto final es profundizar algún tema que hemos tratado en el curso. Además, la idea es que cada estudiante desarrolle su autonomía tanto en la elección del tema como en la de los libros y/o artículos que va a leer. La escritura de un pequeño documento y la presentación oral buscan fortalecer las capacidades expositivas de los estudiantes. Se espera que el estudiante brinde algo nuevo al tema elegido. Esto puede ser un punto de vista distinto sobre el tema, algún ejemplo desarrollado en detalle por sí mismos, algunas simulaciones en computador sobre el tema. No se aceptará una simple traducción o copia de los materiales originales.

En las próximas semanas en la página del curso estará una lista de posibles temas con posibles referencias. Se puede escoger otro tema, pero se debe consultar con el profesor.

### **Fechas y evaluación:**

- 25 octubre: Elección tema.
- 1 noviembre: Entrega resumen breve (1-2 paginas en LaTeX, 11pt, espacio sencillo): el documento tiene que explicar, de manera breve pero completa, el tema que se va a investigar, los objetivos, como se van a lograr esos objetivos mismos y las referencias. Vale el 5% de la nota.
- 29 noviembre: Entrega final (10-12 paginas en LaTeX, 11pt, espacio sencillo): con introducción, resultados, si hay preguntas abiertas y referencias. El documento tiene que cumplir con lo que estaba escrito en el resumen breve, o explicar las razones por las que no se pudo realizar. Vale el 20% de la nota.
- Periodo de los finales: Presentación oral (15 o 30 minutos dependiendo del número de los estudiantes): breve seminario donde, de manera clara, se vayan a explicar los contenidos del proyecto. Vale el 20% de la nota.
- Participación de la audiencia: Cada estudiante debe hacer una pregunta sobre la presentación de sus compañeros. Esta pregunta vale el 5% de la nota.

### **Cronograma:**

Primer día de clase: 09 agosto 2019.  
Entrega primera tarea: 30 agosto 2019.  
Entrega segunda tarea: 20 septiembre 2019.  
Entrega 30% de la nota: 04 octubre 2019.  
Ultimo día para retiro del curso: 11 octubre 2019.  
Entrega tercera tarea: 18 octubre 2019.  
Elección tema: 25 octubre 2019  
Entrega resumen: 1 noviembre 2019  
Entrega proyecto y último día de clase: 29 noviembre 2019.  
Examen final: Periodo finales.

### **Reclamos:**

Las notas serán entregadas por SICUA y/o Banner. Los exámenes y tareas se devolven en la siguiente sesión a la entrega (virtual) de notas. Quien quiera reclamar deberá entregar inmediatamente el examen o la tarea al profesor.

*“Todo estudiante que desee formular un reclamo sobre las calificaciones de cualquier evaluación o sobre la nota definitiva del curso deberá dirigirlo por escrito y debidamente sustentado al profesor responsable de la materia, dentro de los cuatro (4) días hábiles siguientes a aquel en que se dan a conocer las calificaciones en cuestión. El profesor dispone de cinco (5) días hábiles para resolver el reclamo formulado; vencido el término, informará al estudiante la decisión correspondiente.”*