PROYECTOS TEORÍA ERGÓDICA 2019-II

MAURO ARTIGIANI

Objetivo

El objetivo del proyecto final es profundizar alguno de los temas que hemos tratado en el curso. El proyecto final busca que cada estudiante desarrolle su autonomía tanto en la elección del tema como en la de los libros y/o artículos que utilizará. La escritura de un pequeño documento y la presentación oral buscan fortalecer las capacidades expositivas de los estudiantes.

Se espera que el estudiante brinde algo nuevo al tema elegido. Esto puede ser un punto de vista distinto sobre el tema, algún ejemplo desarrollado en detalle por si mismos, algunas simulaciones en computador sobre el tema. No se aceptará una simple traducción o copia de los materiales originales.

Ejecución

Cada estudiante deberá elegir un tema, sujeto a aprobación del profesor, y entregar un breve resumen del tema elegido. Posteriormente, deberá escribir un manuscrito que encapsule lo aprendido y lo hecho en el proyecto. Finalmente, deberá preparar una presentación final sobre el proyecto.

Fechas y evaluación

- 25 octubre: Elección tema.
- 1 noviembre: Entrega resumen breve (1-2 paginas en LaTeX, 11pt, espacio sencillo): el documento tiene que explicar, de manera breve pero completa, el tema que se va a investigar, los objetivos, como se van a lograr esos objetivos mismos y las referencias. Vale el 5 % de la nota.
- 29 noviembre: Entrega final (10-12 paginas en LaTeX, 11pt, espacio sencillo): con introducción, resultados, si hay preguntas abiertas y referencias. El documento tiene que cumplir con lo que estaba escrito en el resumen breve, o explicar las razones por las que no se pudo realizar. Vale el 20 % de la nota.
- Periodo de los finales: Presentación oral (20 minutos). Breve seminario donde, de manera clara, se vayan a explicar los contenidos del proyecto. Vale el 20 % de la nota.
- Participación de la audiencia: Cada estudiante debe hacer una pregunta sobre la presentación de sus compañeros. Esta pregunta vale el 5 % de la nota.

Date: 3 de septiembre de 2019.

Posibles proyectos

Teoremas ergódicos.

- *El teorema ergódico multiplicativo de Oseledets* estudia productos de matrices conectadas con un sistema dinámico. Entender una de las posibles demostraciones, hacer ejemplos (y/o simulaciones) de exponentes de Lyapunov y de subespacios.
- *El teorema de Birkhoff para acciones de grupos amenables.* Hemos visto en el curso acciones de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$. Se pueden definir acciones de otros grupos y mostrar también por estas acciones que un teorema similar al teorema de Birkhoff es cierto. Entender la clase de grupos por la cual vale el teorema, entender la prueba, hacer ejemplos.
- *Aaronson y el fallo de Birkhoff para sistemas de medidas infinita.* La normalización del teorema de Birkhoff falla cuando $\mu(X) = \infty$; además Aaronson ha mostrado que no existe ninguna posible normalización que otorgue un resultado no trivial. Entender la prueba, mostrar que otros teoremas ergódicos existen.

Otros argumentos en teoría ergódica clásica.

- *Entropía métrica y clasificación de los shift Bernoulli.* En el curso hemos hablado de shift de Bernoulli. Es natural preguntarse cuándo dos shift distintos son conjugados mediblemente. La teoría de la entropía métrica fue desarrollada por Kolmogorov exactamente para solucionar ese problema. Entender la definición de entropía métrica. Mostrar qué es un invariante completo para los shift de Bernoulli. Calcular la entropía de ejemplos de shift y de los flujos sobre superficies hiperbólicas estudiados en el curso. Tal vez demostrar la relación entre entropía métrica y topológica.
- *Joinings.* Los joinings entre dos sistemas que preservan la medida son medidas invariantes por la acción producto y que se proyectan sobre las medidas de los sistemas[1]. Estudiar joinings es más general que estudiar conjugación entre sistemas dinámicos y son una herramienta teórica muy importante. Entender la definición, hacer ejemplos, explicar por qué son tan importantes.

Dinámica Parabólica.

- *Nilrotaciones.* En el curso hemos hablado de rotaciones y mencionado que se pueden construir rotaciones en grupo topológicos. Los grupos *nilpotentes* son la primera generalización de un grupo abeliano. Estudiar las nilrotaciones en el grupo de Heisenberg. Explicar por qué las nilrotaciones tienen un comportamiento parecido al flujo horociclico en superficies hiperbólicas.
- *Mezclamiento por cambios de tiempos en el flujo horociclico.* Hemos visto en clase que el flujo horociclico, con velocidad constante, es mezclante. Si permitimos que la velocidad varíe, obtenemos otro flujo, que es una perturbación del flujo horociclico original. Mostrar que la ergódicidad de este flujo es obvia. Entender la demostración que, en general, estos flujo perturbados son mezclantes también.
- *Suspensiones de rotaciones y propiedades estadísticas.* Partiendo de una rotación irracional y escogiendo una función techo se puede construir otro sistema

[1] En lenguaje probabilista, los joinings son copulas invariantes bajo la dinámica.

dinámico. Mostrar que las propiedades de la función techo determinan las de este sistema dinámico. Entender la demostración, explicar por qué son ejemplos interesante. Tal vez hacer la conexión con flujos sobre superficies planas. Construir ejemplos y mostrar las propiedades de los flujos.

- *Billares racionales y non única ergódicidad.* El flujo geodésico en el toro tiene un comportamiento muy sencillo: todas las órbitas son periódicas (si la pendiente es racional) o unicamente ergódicas con respecto a Lebesgue (si no). Generalizando este ejemplo a superficies planas de genus más alto, se pueden construir ejemplos de trayectorias que no son unicamente ergódicas y tampoco periódicas. Entender la construcción, hacer simulaciones.

Dinámica hiperbólica.

- *El método de Hopf para flujos Anosov.* La misma estrategia que hemos aplicado por el flujo geodésico en superficies hiperbólicas se puede aplicar por una clase más amplia de transformaciones caóticas: los flujos de Anosov. Entender el teorema, hacer ejemplos de casos donde sirve y donde no.

Flujo geodésico y temas relacionados.

- *Fracciones continuas, geodésicas y palabras sturmianas.* Las palabras sturmianas son palabras infinitas en $\{0, 1\}$ y son generadas por una rotación irracional. Entender las conexión entre ellas, las fracciones continuas y la codifica de la geodésicas en el toro plano, hacer ejemplos.
- *Geodésicas cerradas y laplaciano.* Una pregunta natural es, dada una superficie hiperbólica, cuántas geodésicas cerradas existen sobre esa con una longitud menor de $L > 0$ (a menos de equivalencias). La respuesta a esta pregunta pasa por analizar el espectro del operador de Laplace-Beltrami en la superficie. Entender la demostración y la relación. Hacer simulaciones.