TERCERA TAREA INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINÁMICOS

MAURO ARTIGIANI

Los ejercicios valen todos 1 punto. La tarea se puede escribir en inglés o en español, o en una mezcla de idiomas. Se puede entregar en físico en mi buzón (`H-100`) o en pdf a mi correo (`m.artigiani@uniandes.edu.co`). La colaboración en equipos pequeños está incentivado. Cada uno tiene que entregar su tarea, escribiendo claramente con quien trabajó.

La fecha limite para la entrega es **viernes 26 de abril a las 1pm (13.00)**. *Cada día de retraso causa una penalidad del* 15 % *en la nota.*

1. Sea $(X, \mathscr{B}, \mu)$ un espacio de medida *finita*. Una transformación medible $T\colon X \to X$ se dice *incompresible* si para todos $A \in \mathscr{B}$ hay que
$$T^{-1}(A) \subset A \implies \mu(T^{-1}A) = \mu(A).$$
Los siguientes pasos prueban el teorema de recurrencia de Poincaré para transformaciones incompresibles.
   a) Sea $A \in \mathscr{B}$ tale que $\mu(A) > 0$. El conjunto $E \subset A$ de los puntos de A que son infinitamente recurrientes se puede escribir como
   $$E = A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n, \qquad \text{donde} \qquad E_n = \bigcup_{k\geq n} T^{-k}A.$$
   b) Los conjuntos E_n satisfacen $E_{n+1} \subset E_n$ y
   $$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$
   Sugerencia: escriba $\mu(E_0 \setminus \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n)$ como serie telescopica utilizando los conjunto disjuntos $E_n \setminus E_{n+1}$.
   c) Muestre que $T^{-1}(E_n) = E_{n+1}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E_0)$. Concluya notando que $A \setminus \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n \subset E_0 \setminus \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
2. Sea $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ el toro tridimensional. Fijamos $\alpha \notin \mathbb{Q}$ y definimos $T\colon \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ como
$$T(x, y, z) = (x + \alpha \mod 1, y + x \mod 1, z + y \mod 1).$$
   a) Pruebe por inducción que si $T^n(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$ hay que
   $$\begin{aligned} x_n &= x + n\alpha \mod 1, \\ y_n &= \frac{2n}{n-1} \cdot \alpha + nx + y \mod 1, \\ z_n &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \cdot \alpha + \frac{n(n-1)}{2} x + ny + z \mod 1. \end{aligned}$$
   b) Pruebe que T preserva la medida de Lebesgue tridimensional λ.

Date: 13 de abril de 2019.

c) Pruebe que T es ergodica para λ.
Sugerencia: se puede utilizar serie de Fourier.

3. Sea $N \geq 2$ un número entero y consideramos el Bernoulli shift $(\Sigma^+, \mathscr{B}, \mu_p)$ dado por un vector de probabilidad $p = (p_1, \dots, p_N)$. Demuestre que, para μ_p-ctp $x \in \Sigma^+$ hay
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_p(C_n(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i,$$
donde $x = x_1 x_2 \cdots$.
Sugerencia: relacione la medida del cilindro con las frecuencias de los dígitos.

4. *a*) Sea p un vector de probabilidad y μ_p la medida de Bernoulli asociada en el shift Σ^+ sobre N símbolos. Muestre que μ_p es un caso especial de medida de Markov.
b) Sea B una matriz $N \times N$ non-negativa y irreducible. Se puede mostrar que B tiene un único vector propio izquierdo u con valor proprio λ y un único vector propio derecho v con valor propio λ, es decir
$$uB = \lambda u, \qquad Bv = \lambda v.$$
Definimos una matriz $N \times N$ P y un vector $p \in \mathbb{R}^N$ dados por
$$P_{ij} = \frac{B_{ij} v_j}{\lambda v_i}, \quad 1 \leq i, j \leq N; \qquad p_i = \frac{u_i v_i}{\sum_{j=1}^{N} u_j v_j}, \quad 1 \leq i \leq N.$$
Demuestre que P es estocástica y que p es un vector de probabilidad. Además $pP = p$, entonces P define una medida de Markov, dicha medida de *Parry*.

5. Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ el β-shift dado por
$$T(x) = \beta x \mod 1,$$
donde $\beta \in \mathbb{R}$ y $\beta > 2$.
a) Demuestre que T preserva la medida de Lebesgue λ *si y solo si* $\beta \in \mathbb{Z}$.
b) Sea $\beta = [1; 1, 1, \dots]$ la sección áurea. Definimos la medida $\mu(B) = \int_B k(x)\, dx$ sobre los borelianos de $[0,1]$, donde
$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{1/\beta + 1/\beta^3}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/\beta, \\ \frac{1}{\beta(1/\beta + 1/\beta^3)}, & \text{si } 1/\beta \leq x1. \end{cases}.$$
Pruebe que μ es preservada por T.
Sugerencia: muestre que $\beta^2 = \beta + 1$.