SEGUNDA TAREA TEORÍA ERGÓDICA

MAURO ARTIGIANI

Los ejercicios valen todos 1 punto. La tarea se puede escribir en inglés o en español, o en una mezcla de idiomas. Se puede entregar en físico en mi buzón (`H-100`) o en pdf a mi correo (`m.artigiani@uniandes.edu.co`). La colaboración en equipos pequeños está incentivado. Cada uno tiene que entregar su tarea, escribiendo claramente con quien trabajó.

La entrega de la tarea es al **comienzo** de la clase de **miércoles 25 septiembre**. *Cada día de retraso causa una penalidad de* 0,2 *puntos en la nota.*

1. (Ej. 2.9.1 [EW]). Vamos a construir una inversa de un sistema inducido. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema que preserva la medida y sea $r \colon X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ una función en $L^1(X, \mu)$. La *suspension* definida por r es el sistema $(X^{(r)}, \mathcal{B}^{(r)}, \mu^{(r)}, T^{(r)})$, donde:
   - $X^{(r)} = \{(x, n) : 0 \le n < r(x)\}$;
   - $\mathcal{B}^{(r)}$ es el producto de la σ-álgebra $\mathcal{B}$ con todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$.
   - $\mu^{(r)}$ es definida por
   $$\mu^{(r)}(A \times N) = \frac{1}{\int r \, d\mu} \cdot \mu(A) \cdot |N|,$$
   para $A \in \mathcal{B}$ y $N \subset \mathbb{N}$;
   - $$T^{(r)}(x, n) = \begin{cases} (x, n+1), & \text{si } n+1 < r(x); \\ (T(x), 0), & \text{si } n+1 = r(x). \end{cases}$$

   Verifique que lo de arriba define un sistema que preserva la medida. Demuestre que el mapa inducido sobre el conjunto $A = \{(x, 0), x \in X\}$ es isomorfo al sistema originario $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$.
2. (Ej. 2.7.13 [EW]). Sea T un endomorfismo mezclante de $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Se sabe que la siguiente estimación sobre la *taza de mezclamiento* es cierta:
   $$\left| \langle f, U_T^n g \rangle - \int f \int g \right| \le C(f) C(g) \theta^n,$$
   para $0 < \theta < 1$ que depende de T y constantes $C(f)$ y $C(g)$ que dependen de las funciones f, $g \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$.
   a) Demuestre una estimación similar para $T_n \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ definida por $T_n(x) = nx \mod 1$.
   b) Demuestre una estimación similar para el automorfismo de $\mathbb{T}^2$ definido por $T(x, y) = (y, x + y)$.
   c) ¿Puede ser cierta una estimación así para *todas* las funciones continuas?
3. (Ej. 4.1.4 [EW]). Hemos visto que los shift de Bernoulli son mezclantes (y en particular ergódicos). Vamos a ver que hay *muchas más* medidas ergódicas.

Date: 18 de septiembre de 2019.

  a) Demuestre que cada órbita periódica suporta una medida ergódica que no es la medida de Bernoulli;
  b) Demuestre que existen medidas ergódicas para el shift que no son ni la medida de Bernoulli ni suportadas en órbitas periódicas.

4. (Ej. 9.2.1 [EW]). Sea $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ tal que la distancia entre los puntos bases de $g_t(i, i)$ y $g_t(z, v)$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$. Entonces hay $\Im(z) = 1$ y $v = i$.
5. (Ej. 11.2.2 [EW]). El *grupo triangular de Hecke* $G_n \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, para $n \geq 3$ es el grupo generado por
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad T_n = \begin{pmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Encuentre el dominio de Dirichlet de G_n respecto al punto $p = 2i$. Calcule el area del él.