SEGUNDA TAREA INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINÁMICOS

MAURO ARTIGIANI

Los ejercicios valen todos 1 punto. La tarea se puede escribir en inglés o en español, o en una mezcla de idiomas. Se puede entregar en físico en mi buzón (`H-100`) o en pdf a mi correo (`m.artigiani@uniandes.edu.co`). La colaboración en equipos pequeños está incentivado. Cada uno tiene que entregar su tarea, escribiendo claramente con quien trabajó.

La fecha limite para la entrega es **viernes 8 de marzo a las 5pm (17.00)**. *Cada día de retraso causa una penalidad del* 15 % *en la nota.*

1. Un punto x de un sistema dinámico topológico $f\colon X \to X$ es *non errante (non wandering)* si para cualquiera vecindad U de x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \varnothing$.

   Sea f invertible. Demuestre que el conjunto $NW = NW(f)$ de los puntos non errantes por f es cerrado, f-invariante (i.e.: $f(NW) = NW$) y que contiene $\omega(x)$ y $\alpha(x)$ para todos los $x \in X$, donde:
   $$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}, \qquad \text{y} \qquad \alpha(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^{-i}(x)}$$
   son los puntos limites de la órbita completa del punto x.
2. Demuestre que el mapeo de duplicación es topológicamente mezclante.
   Sugerencia: trate de adaptar la demostración que hemos visto para el mapeo del panadero.
3. Sea $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ el mapeo del panadero. Sea
   $$D_n(y) = \left\{ \left(\frac{i}{2^n}, y \right), 0 \leq i \leq 2^n - 1 \right\},$$
   para $y \in [0,1]$. Fijamos $1/2^{k+1} < \varepsilon \leq 1/2^k$.
   a) Demuestre que, para todos los $y \in [0,1]$ fijados, $D_{n-1+k}(y)$ es (n,ε)-separado para F.
   Sugerencia: Si identificamos $D_n(0)$ con el conjunto de puntos diadicos en $[0,1]$, $D_n(0)$ es (n,ε)-separado para el mapeo de duplicación.
   b) Demuestre que
   $$D = \bigcup_{j=0}^{2^k-1} D_{n-1+k}\left(\frac{j}{2^k}\right)$$
   es (n,ε)-generador para F.
   Sugerencia: demuestre y utilize que, si $x_1 = x_2$ hay
   $$d(F(x_1,y_1), F(x_2,y_2)) = \frac{1}{2} d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \frac{|y_1 - y_2|}{2}.$$
   c) Calcule $h_{\text{top}}(F)$.

Date: 1 de marzo de 2019.

4. Demuestre que si $f\colon X \to X$ es un sistema dinámico topológico expansivo, el conjunto $\mathrm{Per}_n(f)$ de los punto periódicos de périodo n es finito.
   Sugerencia: acuérdese que un conjunto compacto es compacto por sucesiones.
5. Sea $\sigma\colon \Sigma_N^+ \to \Sigma_N^+$ el *shift* unilaterál completo sobre N símbolos.
   a) Describa el conjunto $\mathrm{Per}_n(\sigma)$ y calcule su cardinalidad. Demuestre que $\mathrm{Per}(\sigma) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Per}_n(\sigma)$ es denso.
   b) Fije un natural n y sea $0 < \varepsilon < 1/\rho$. Demuestre que $\mathrm{Per}_n(\sigma)$ es un conjunto (n,ε)-separado.
   c) Fije dos natural n y k. Demuestre que, para $\varepsilon > 1/\rho^{k-1}$, hay que $\mathrm{Per}_{n+k+1}(\sigma)$ es un conjunto (n,ε)-generador.
   d) Calcule $h_{\mathrm{top}}(\sigma)$.