

PARCIAL DE INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINÁMICOS

MAURO ARTIGIANI

Los ejercicios valen todos 1 punto. El parcial se puede escribir en inglés o en español, o en una mezcla de idiomas.

1. Demuestre que, para todos $k \in \mathbb{Z}$, hay una semiconjugación continua entre R_α y $R_{k\alpha}$.
2. Sea $T: X \rightarrow X$ un sistema dinámico topológico. Demuestre que si T es topológicamente transitivo entonces las únicas funciones *continuas* invariantes son las constantes, es decir:

$$f \circ T = f \implies f = \text{const.}$$

3. Sea $T: S^1 \rightarrow S^1$ el mapeo de duplicación $x \mapsto 2x$ mód 1. Demuestre que T es ergódico con respecto a la medida de Lebesgue λ .
Sugerencia: Utilize serie de Fourier.
4. Sea A una matriz de transición y σ_A la cadena de Markov topológica asociada. Si, para $n \geq 1$, $\text{Fix}(\sigma_A^n)$ es el conjunto de los puntos fijos de σ_A^n , definimos la función Zeta de σ_A como la serie formal:

$$\zeta_{\sigma_A}(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\text{Fix}(\sigma_A^n)| z^n.$$

Ahora sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule $\zeta_{\sigma_A}(z)$.

5. Sean $f: X \rightarrow X$ y $g: Y \rightarrow Y$ dos sistemas dinámicos topológicos. Sea $\psi: X \rightarrow Y$ una semiconjugación continua entre ellos. Demuestre que

$$h_{\text{top}}(f) \geq h_{\text{top}}(g).$$

Sugerencia: Utilize que para todos $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tale que $d_X(x, y) < \delta$ implica que $d_Y(\psi(x), \psi(y)) < \varepsilon$. Además hay que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta = 0$.